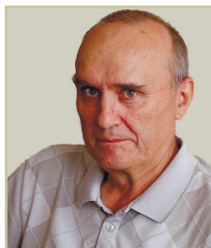


УДК 622.023.23

© Н.В. Черданцев, В.С. Зыков, 2017

### Н.В. ЧЕРДАНЦЕВ

д-р техн. наук, заведующий лабораторией  
ФГБНУ ФИЦ УУХ СО РАН, г. Кемерово  
e-mail: nvch2014@yandex.ru



### В.С. ЗЫКОВ

д-р техн. наук, проф.,  
главный научный сотрудник лаборатории  
АО «НЦ ВостНИИ», г. Кемерово  
e-mail: vnimizvs@mail.ru



## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ОПОРНОГО ДАВЛЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ПЛАСТОВОЙ ВЫРАБОТКИ НА ОСНОВЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

*Представлены результаты решения задачи о геомеханическом состоянии углепородного массива, вмещающего пластовую выработку. Прочность вмещающих пород значительно превышает прочность пласта, а его диаграмма условных напряжений соответствует диаграмме Прандтля с параллельным оси абсцисс участком предельного деформирования.*

*В рассматриваемой краевой задаче породы массива находятся в условиях плоского деформированного состояния, а зона пласта в окрестности выработки предельно напряжена. Задача решается методами механики деформируемого твёрдого тела.*

*По результатам проведённых исследований построены графики изменения коэффициента концентрации напряжений и размера предельно напряжённой зоны пласта в зависимости от пролёта выработки. Углепородный массив до проведения выработки нагружен равнокомпонентным (гидростатическим) полем напряжений. Показано, что с увеличением пролёта выработки интенсивность роста параметров опорного давления уменьшается.*

**Ключевые слова:** МАССИВ ГОРНЫХ ПОРОД, УГОЛЬНЫЙ ПЛАСТ, ГОРНАЯ ВЫРАБОТКА, ПРЕДЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ, ТЕОРИЯ ПРОЧНОСТИ КУЛОНА-МОРА

### ВВЕДЕНИЕ

Оценка напряжённо-деформированного состояния массива, вмещающего угольный пласт и проводимую по нему выработку, в краевых частях которой образуются предельно-напряжённые (предельные) зоны с неупругими (пластическими) деформациями, является важной и актуальной научной и производст-

венной проблемой, поскольку параметры этих зон определяют степень опасности различных геодинамических явлений [1-4].

Особенно остро проблема встает на достаточно больших глубинах, когда размеры предельно напряжённых зон угольного пласта значительны, а коэффициент концентрации напряжений в них достигает очень больших значений. В этих случаях детальная и

достоверная информация, полученная в ходе натуральных наблюдений и замеров ряда параметров приконтурного массива, необходима для контроля геодинамических проявлений. А результаты расчёта напряжённо-деформированного состояния массива, полученные в рамках моделей, адекватно отражающих работу массива, обеспечивают надёжный прогноз геодинамических явлений и позволяют разработать комплекс мероприятий для их профилактики.

Параметры опорного давления (размер предельно напряжённой зоны  $L_{от}$  и коэффициент концентрации напряжений  $k_0$ ) в краевых частях угольного пласта могут быть определены экспериментально с помощью различного рода приборов непосредственно в области ведения горных работ, а также теоретически в рамках ряда существующих моделей геомеханического состояния массива.

Экспериментальному определению параметров опорного давления посвящено достаточно много работ, например, [5-7]. Недостатком экспериментальных методов является регулярный контроль над состоянием массива, что сопряжено с дополнительными затратами, к тому же эти методы не позволяют установить характер изменения кривых опорного давления.

Что касается теоретических методов, то с их помощью задача определения параметров опорного давления в самом общем случае (для широкого спектра характеристик прочности боковых пород) до настоящего времени, по видимому, полностью ещё не решена. К тому же существующие модели базируются на ряде эмпирических коэффициентов, определение которых сопряжено с трудностями технического характера [8-11]. Однако теоретические методы по сравнению с экспериментальными всё же имеют ряд преимуществ. Во-первых, они менее затратные, во-вторых, позволяют установить качественные и количественные закономерности в поведении массива и, следовательно, давать некоторые прогнозные оценки деформирования массива.

В связи с этим разработка моделей геомеханического состояния углепородного массива

с системой выработок на основе фундаментальных методов механики деформируемого твёрдого тела, создание алгоритмов и реализация их в пакетах прикладных программ является важной научной задачей.

В зависимости от характеристик прочности угольного пласта и вмещающих боковых пород переход этих пород в предельное состояние при отработке пласта может происходить по-разному. В одних случаях наступление предельного состояния пород кровли пласта с последующим их обрушением происходит при сравнительно небольших размерах выработанного пространства. В других случаях до обрушения кровли размеры выработанного пространства могут быть столь значительны, что начинается пучение пород почвы пласта, а при обрушении кровли возникают аварии при проветривании горных выработок и выход из строя горного оборудования, расположенного в забое выработки.

В работе [12] показано, что при равнокомпонентном исходном поле напряжений массива в кровле и почве выработки большого пролёта не возникает растягивающих напряжений. Поэтому при достаточно крепких, монолитных и мощных боковых породах пласта зависание пород кровли над выработанным пространством без их обрушения и пучения происходит на огромных площадях, а это приводит к очень большим нагрузкам на краевые части пласта и образованию предельно напряжённых зон значительных размеров [13].

В данной работе представлены результаты исследований состояния углепородного массива, нагруженного равнокомпонентным полем напряжений и вмещающего пластовую выработку с увеличивающимся пролётом, и угольный пласт, в кровле и почве которого залегают породы, значительно превышающие прочность пласта. Приведены условия перехода кровли (почвы) пласта в предельное состояние впереди выработки (в бортах). Исследования проведены в рамках модели геомеханического состояния анизотропного (по прочности) массива горных пород, имеющего поверхности ослабления [14-16].

### ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

В массиве горных пород, моделируемом невесомой плоскостью, имеется выработка прямоугольного сечения размерами  $b \times h$ , пройденная на глубине  $H$  по угольному пласту на всю его мощность. В кровле и почве выработки приложена реактивная нагрузка крепи  $q$ . Характеристики прочности угольного пласта меньше, чем характеристики прочности пород основного массива, но превышают характеристики прочности по контактам пласта с остальным массивом, который нагружен гравитационным давлением сверху и снизу  $\gamma H$  ( $\gamma$  – средневзвешенный объёмный вес налегающих пород), а с боков –  $\lambda\gamma H$  ( $\lambda$  – коэффициент бокового давления). В краевых частях пласта образуются зоны неупругого деформирования (предельно напряжённые зоны) шириной  $L_{OT}$ . Система координат  $yo_z$  привязана к центральным осям поперечного сечения выработки. Заменяем краевую часть пласта, называемую иногда областью отжима, действующими в ней напряжениями, представляющими собой реакцию этой части пласта на массив. Поскольку краевая часть находится в предельном состоянии, то в качестве отпора принимаем напряже-

ния  $\sigma_{p,y}, \sigma_{p,z}, \tau_{p,yz}, \tau_{p,zy}$ , являющиеся напряжениями предельного состояния в этой части пласта [11]. В результате мы получаем расчётную схему с выработкой, в почве и кровле которой действует реакция крепи  $q$ , а другие две части размером  $L_{OT}$  нагружены изнутри указанными напряжениями (рисунок 1).

Поскольку условия на границе предельной зоны пласта и вмещающих пород массива известны, то эта задача относится ко второй внешней краевой задаче теории упругости. В ней статические граничные условия формулируются по замкнутому контуру, включающему кровлю, почву выработки и участки контакта пласта с боковыми породами в предельных краевых зонах пласта длиной  $L_{OT}$ . Так, на закреплённых участках кровли и почвы выработки граничные условия имеют вид:

$$P_z = q, P_y = 0;$$

на участках почвы и кровли пласта в пределах предельно напряжённой зоны они принимают вид:

$$P_z = \sigma_{p,z}, P_y = \tau_{p,yz};$$

на вертикальных участках границы упругой и предельной зон пласта граничные условия следующие:

$$P_z = \tau_{p,yz}, P_y = \sigma_{p,y}$$

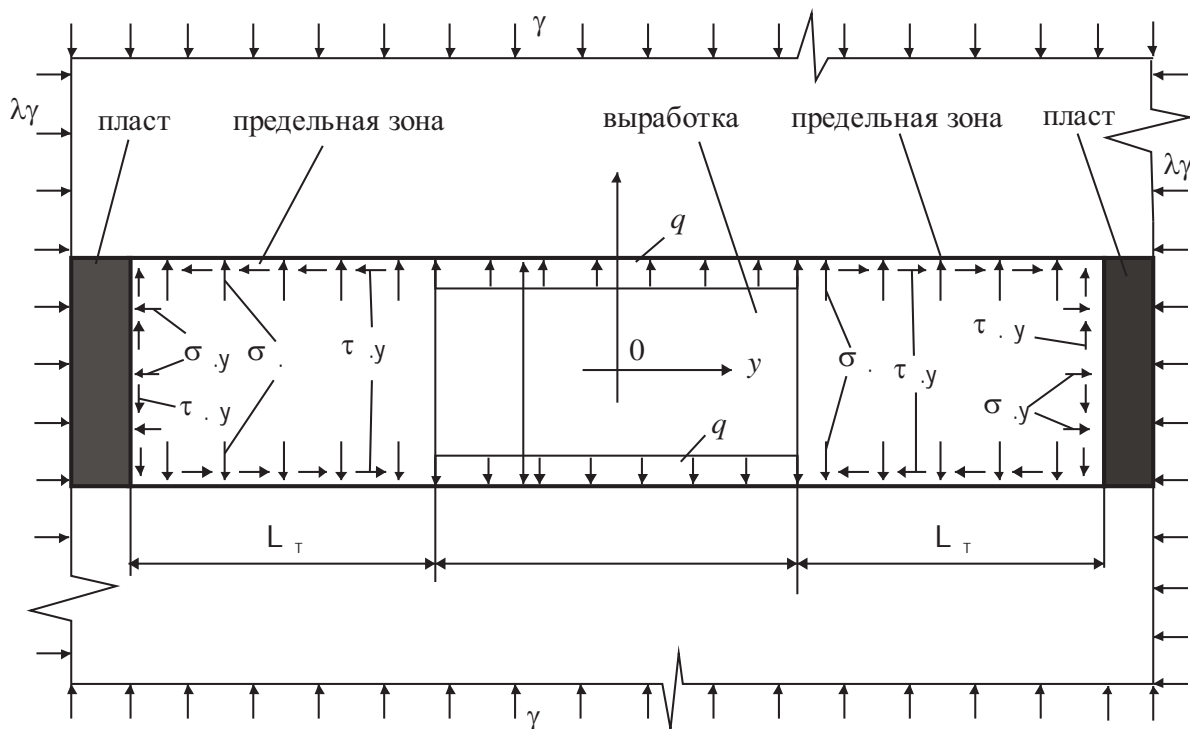


Рисунок 1 – Расчётная схема массива с пластовой выработкой

Наиболее эффективным методом решения поставленной задачи является метод граничных элементов (МГЭ) в форме фиктивных нагрузок [17, 18]. Метод относится к классу численных методов. Его преимущество по сравнению с другими численными методами состоит в том, что конечными элементами аппроксимируется только поверхность выработки, а не весь объём массива, как это делается в методах конечных разностей (МКР) и конечных элементов (МКЭ). Это обстоятельство играет существенно-положительную роль в решении поставленной задачи для массива с прочностной анизотропией, которая обусловлена поверхностями ослабления, освобождая от необходимости формулирования граничных условий на поверхностях ослаблений. Поверхностями ослабления являются направления в массиве с более низкими характеристиками прочности по сравнению с его основными породами, расположенными между ними. К поверхностям ослабления относятся в основном слоистость и кливаж.

Идея метода граничных элементов состоит в решении граничного интегрального уравнения – второй внешней задачи теории упругости, полученного на основе теории потенциалов, и вычислении напряжений в точках расчётной области с помощью результатов полученного решения и фундаментальных решений задачи Кельвина о действии сосредоточенной силы в бесконечном пространстве [19, 20].

Это граничное интегральное уравнение относительно неизвестного вектора фиктивной нагрузки, приложенного к его контуру, имеет вид [19, 21]:

$$\frac{1}{2} \sigma_{qm} \cdot n_m(\mathbf{x}) - \int_L \Phi_{qm}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot m(\mathbf{y}) = F(\mathbf{x}), \quad (1)$$

где индексы  $q, m$  попеременно принимают значения 2, 3 (цифра 2 – соответствует оси  $y$ , 3 – оси  $z$ ).  $L$  – область интегрирования (контур выработки),  $Q_o, M_o$  – точки на поверхности этой области,  $dOM_o$  – дифференциал поверхности в окрестности точки  $M_o$ ,  $\Phi_{qm}(Q_o, M_o)$  –

тензор Грина,  $n_q(Q_o), n_q(M_o)$  – векторы нормали к поверхности выработки в точках  $Q_o, M_o$ ;  $a_q, a_q, a_m$  – компоненты вектора фиктивной нагрузки.  $F_q(Q_o)$  – обобщённый вектор нагрузки, приложенный к поверхности выработки изнутри,  $\sigma_{e, qm}$  – компоненты тензора естественного поля в нетронутом горными работами массиве, которые при отсутствии тектонических напряжений представляются в виде

$$\sigma_{e,y} = \sigma_{e,22} = \lambda \gamma H, \sigma_{e,z} = \sigma_{e,33} = \gamma H, \tau_{e,yz} = \sigma_{e,23} = 0.$$

Тензор Грина в уравнении (1) имеет следующий вид:

$$\times \left\{ (1 - 2\mu) \left( x_q(Q_o, M_o) n_m(Q_o) - x_m(Q_o, M_o) n_q(Q_o) \right) + \left[ (1 - 2\mu) \delta_{qm} + 2 \frac{x_q(Q_o, M_o) x_m(Q_o, M_o)}{[r(Q_o, M_o)]^2} \right] \frac{x_t(Q_o, M_o) n_t(Q_o)}{r(Q_o, M_o)} \right\}$$

где  $\mu$  – коэффициент Пуассона,  $x_q(Q_o, M_o)$ , например, при  $q=2$  принимает вид:  $x_2(Q_o, M_o) = y(Q_o, M_o)$ . Это проекция на ось  $y$  отрезка, соединяющего точки  $Q_o$  и  $M_o$ . Величина  $n_q(Q_o)$  при  $q=3$  принимает вид  $n_3(Q_o) = n_z(Q_o)$ . По повторяющемуся индексу производится суммирование.  $r(Q_o, M_o)$  – расстояние между точками  $Q_o$  и  $M_o$ ,  $\delta_{qm}$  – символ Кронекера (при совпадении значений индексов  $q=t$  он равен единице, а при  $q \neq t$  равен нулю).

Заменяем вектор усилий  $F_q(Q_o)$  на всём замкнутом контуре распределённой нагрузкой реакции крепи выработки и компонентами напряжений  $\sigma_{p, qm}$  в предельной зоне. В результате этой процедуры приводим уравнение (1) к следующему уравнению с единообразно записанной правой частью

$$\frac{1}{2} \sigma_{qm} \cdot n_m(\mathbf{x}) - \int_L \Phi_{qm}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot m(\mathbf{y}) = \left[ \sigma_{p, qm} n_m(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) \right] \quad (\mathbf{x} \in L) + (\sigma_{p, qm} - \sigma_{e, qm}) n_m(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in L), \quad (2)$$

где  $L$  – внешний контур, охватывающий почву, кровлю выработки и границы предельно напряжённой зоны,  $L_p$  – контур предельно напряжённой зоны,  $L_b$  – контур, охватывающий почву и кровлю выработки.

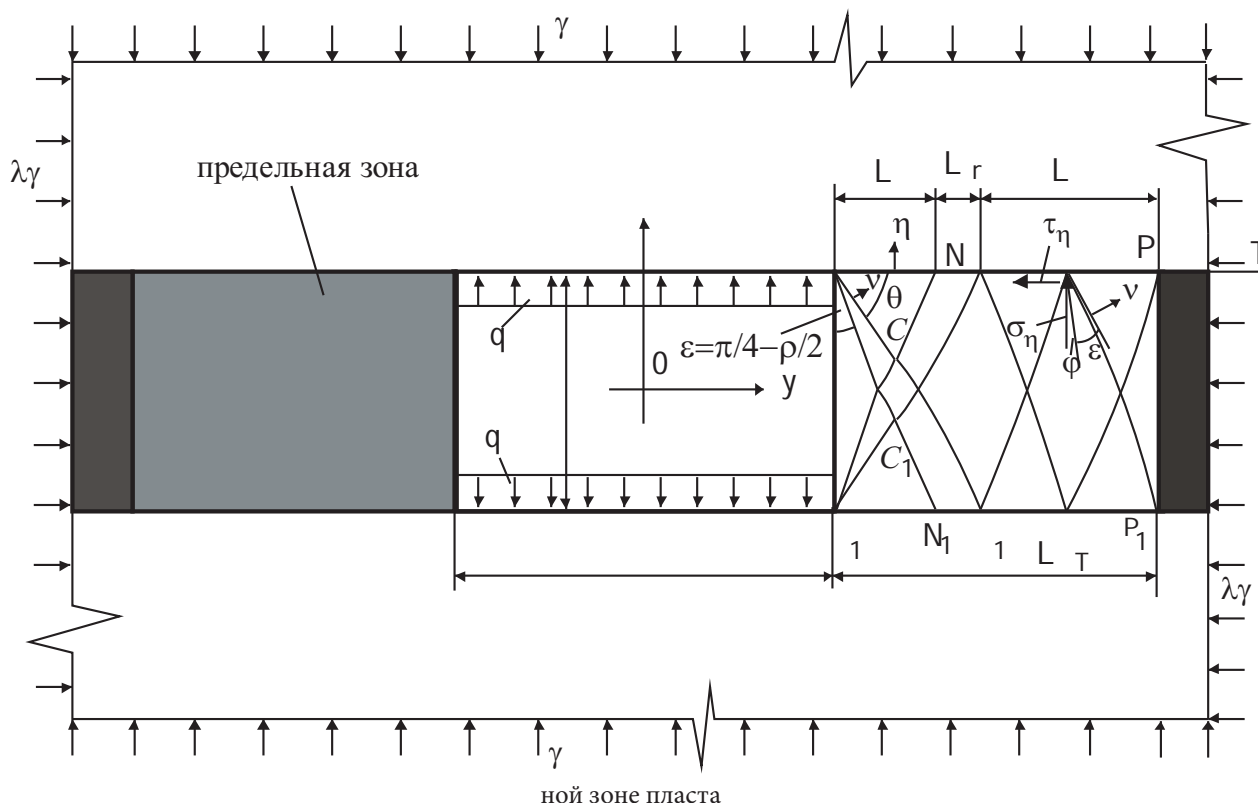
Таким образом, для части контура, относящегося непосредственно к выработке в правой части уравнения (2), учитывается только пер-

вое слагаемое в правой части, а на поверхности предельно напряжённой зоны учитываются только  $\sigma_{e,qm}$ ,  $\sigma_{p,qm}$ , которые определяются из решения задачи о предельном состоянии (равновесии) пласта в предельно напряжённых зонах.

Известно, что в предельной зоне пласта имеется по три участка (сверху и снизу от оси  $y$ ) (рисунок 2) с характерным распределением линий скольжения на каждом из них [11]. На

каждом из них проявляются отличительные особенности состояния пласта. Участок  $VICIN1$  – участок предельного одноосного сжатия длиной  $L_k$ . Участки  $VIBCNGDC1$  и  $VCDGINIC1B$  размером  $L_{pr}$  являются зонами Прандтля, а участок  $GDGIPIP$  размером  $L_p$  – участок неупругого деформирования пласта.

Рисунок 2 – Схема линий скольжения в предель-



В области выпирания, представляющей собой призму  $VBV1$ , пласт испытывает одноосное сжатие. Главное напряжение  $\sigma_1$  равно пределу прочности пласта на одноосное сжатие  $\sigma_0$ , которое действует вдоль кромки обнажения пласта и образует угол  $\epsilon$  с направлением системы изогональных линий скольжения.

Поскольку вдоль контактов пласта с окружающими породами возможно нарушение сплошности, проявляющееся в виде проскальзывания пласта, то в них будет одновременно существовать два предельных состояния – обыкновенное (для пласта) и специальное (для контакта пласта с вмещающими породами) [11], что демонстрируется кругом напряжений Мора (рисунок 3). На нём видно, что первая площадка скольжения с нормалью  $v$  согласно критерию Кулона – Мора находится в точке

касания круга напряжений и прямолинейной огибающей 1 предельного состояния для пласта с углом наклона  $\rho$  к оси абсцисс.

Положение второй площадки с нормалью  $\eta$  найдено по критерию Мора – Кузнецова [22] в результате пересечения с кругом напряжений прямолинейной огибающей 2 предельного состояния по поверхности ослабления, составляющей угол наклона  $\rho'$  с осью абсцисс. Площадка с нормалью  $\eta$  совпадает с плоскостью контакта пласта с окружающими породами. Углы  $\rho$  и  $\rho'$  – являются углами внутреннего трения, а  $K$  и  $K'$  – коэффициентами сцепления соответственно для пласта и его контакта с боковыми породами,  $\sigma_0$  – предел прочности на одноосное сжатие пласта.

Угол  $\theta$  между площадками с нормалью  $v$  и  $\eta$  находим из рисунка 3:

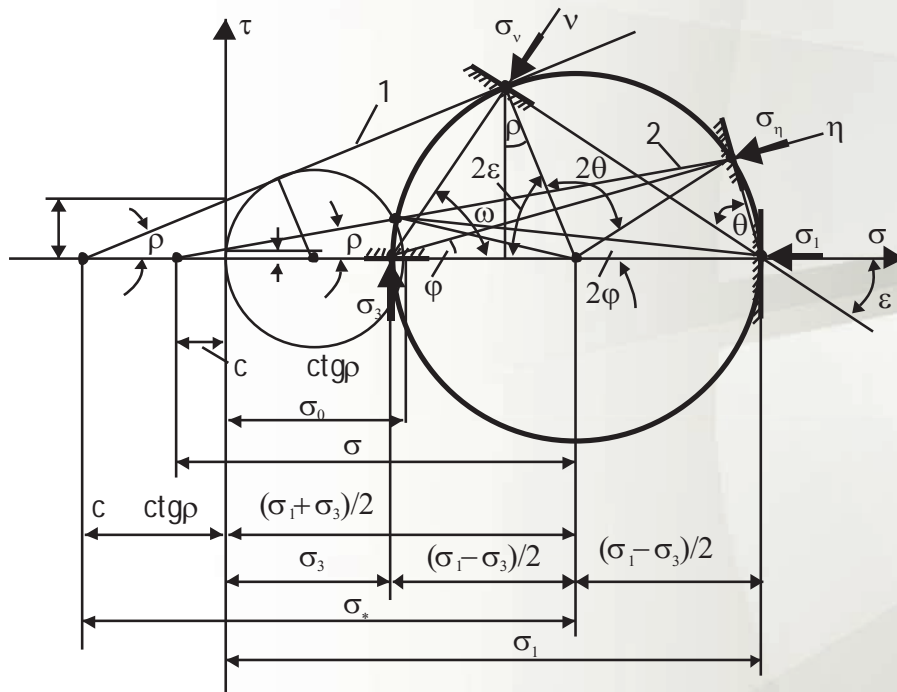


Рисунок 3 – Схема к определению углов  $\epsilon$ ,  $\omega$ ,  $\phi$ ,  $\theta$  в предельно напряжённой зоне

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(\rho - \rho') - \frac{1}{2} \cdot n \left[ \frac{n \rho' \left(1 - \frac{c}{\sigma}\right)}{n \rho} \right],$$

где величины  $\sigma_*$  и  $\sigma'_*$  определяются из рисунка 3 по формулам

$$\sigma = c + \frac{\sigma_1 + \sigma}{2}, \quad \sigma' = c' + \frac{\sigma_1 + \sigma}{2}.$$

$\sigma_*$  и  $\sigma'_*$  представляют собой приведённые напряжения в угольном пласте и на поверхности ослабления [11]. Величины  $c$  и  $c'$  выражаются через  $K, \rho, K', \rho'$  по формулам (рисунок 3).

Углы  $\epsilon$  и  $\omega$  образованы площадкой скольжения с нормалью  $v$  и главными напряжениями  $\sigma_1, \sigma_3$ . Из рисунка 2 видно, что они определяются по формулам:

$$\epsilon = \frac{\pi}{2} - \frac{\rho}{2}, \quad \omega = \frac{\pi}{2} + \frac{\rho}{2}.$$

В зонах Прандтля (рисунок 2) образуется две системы линий скольжения. Первая система – семейство логарифмических спиралей, вторая – пучок радиальных линий.

Угол  $\Delta\phi$  секторов  $VBC$  и  $V_1BC_1$  и длины их радиальных линий определяются следующим образом [11]:

$$\Delta\phi = \omega - \theta, \quad r = r_0 \cdot e^{-\Delta\phi \cdot \rho},$$

где  $r_0$  – отрезок  $VB$  ( $V_1B$ ), примыкающий к области выпирания  $VBV_1$ ,  $r$  – граничный от-

резок сектора Прандтля, равный отрезку  $VC$  (или  $V_1C_1$ ).

Напряжения в зоне Прандтля вдоль соответствующей радиальной линии постоянны, а вдоль логарифмических спиралей изменяются экспоненциально [6]. Так, например, в точках  $C$  и  $D$  напряжение определяется следующим образом:

$$\sigma_C = \sigma_0 \cdot e^{2\Delta\phi \cdot \text{tg}\rho}, \quad \sigma = \sigma_C \cdot e^{-2\Delta\phi \cdot \text{tg}\rho}.$$

На участках предельно напряжённой зоны, расположенных правее линий скольжения  $DG$  (рисунок 3), для определения углов  $\theta$  необходимо знать приведённые напряжения в узловых точках на контактах целика с вмещающими породами. Для их определения следует воспользоваться зависимостью приведённых напряжений  $\sigma^*$ , действующих вдоль оси  $y$  и изменяющихся экспоненциально [11],

$$\sigma_* = \sigma_{0*} \cdot e^{\left(\frac{y-b}{2}\right)},$$

где  $\sigma_{0*}$  – приведённое напряжение на кромке пласта,  $y \geq b/2$  и параметр  $k$  определяются по формулам [11]:

$$\sigma_{0*} = \frac{\sigma_0}{2 \cdot \sin \rho}, \quad = \frac{2}{m} \cdot \text{tg}^2 \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\rho}{2} \right) \cdot \text{tg}\rho'.$$

Нормальные и касательные напряжения в предельно напряжённой зоне на контакте пла-

ста с массивом выражаются очевидными соотношениями, вытекающими из рисунка 3:

$$\sigma_{\eta} = \frac{\sigma_1 + \sigma}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma}{2} \cdot \cos 2\varphi,$$

$$\tau_{\eta} = \frac{\sigma_1 - \sigma}{2} \cdot \sin 2\varphi,$$

из которых получаются формулы для вычисления напряжений

$$\sigma_1 = \sigma_* (1 + \sin \rho) - c, \quad \sigma = \sigma (1 - \sin \rho) - c,$$

$$\sigma_{\eta} = \sigma (1 - \sin \rho \cdot \cos 2\varphi) - c, \quad \tau_{\eta} = \sigma \cdot \sin \rho \cdot \sin 2\varphi,$$

где  $\varphi$  – угол между  $\sigma_1$  и нормалью к поверхности ослабления.

Из рисунка 3 следует связь между углами  $\varphi$  и  $\theta$ ,  $\varepsilon$  соотношения:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - (\varepsilon + \theta),$$

а также два важных соотношения

$$\left( \begin{array}{l} \cdot \\ \rho + \frac{\sigma_0}{2} \end{array} \right) \sin \rho = \frac{\sigma_0}{2},$$

$$\left( \begin{array}{l} \cdot \\ \rho + \frac{\sigma_1 + \sigma}{2} \end{array} \right) \sin \rho = \frac{\sigma_1 - \sigma}{2}. \quad (3)$$

Преобразование зависимостей (3) позволяет получить связь между  $K$  и  $\sigma_0$ , а также условие предельного состояния согласно теории прочности Кулона – Мора

$$\sigma_0 = \frac{2 \cdot \cos \rho}{1 - \sin \rho}, \quad \sigma_1 - \beta_n \sigma = \sigma_0, \quad (4)$$

где  $\beta_n$  – параметр объемной прочности определяется по формуле

$$\beta_n = \frac{1 + \sin \rho}{1 - \sin \rho}. \quad (5)$$

Из формулы (4) следует, что левая часть, называемая эквивалентными напряжениями  $\sigma_i$  по теории Кулона – Мора, является постоянной величиной на всех участках предельно напряжённой зоны. Следовательно, диаграмма условных напряжений  $\sigma_i - \varepsilon_i$  ( $\varepsilon_i$  – эквивалентные деформации) соответствует диаграмме Прандтля (линия 0-1-2 на рисунке 4). Участок 0 – 1 диаграммы является участком упругого деформирования пласта, а её горизонтальный участок 1 – 2 соответствует предельному (пластическому) состоянию пласта.

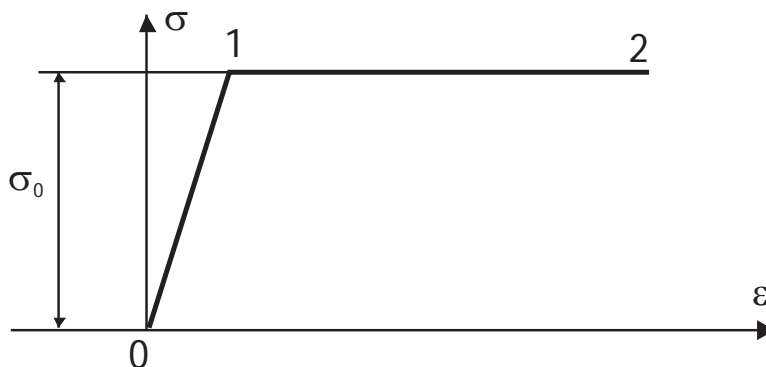


Рисунок 4 – Диаграмма условных напряжений деформирования пласта

Из приведённых выше зависимостей следует, что распределение нормальных и касательных напряжений в предельной зоне пласта можно получить. В этой связи в интегральном уравнении (2) остаётся два неизвестных: плотность фиктивной нагрузки и размер предельно напряжённой зоны. Чтобы его решить используем два метода: метод последовательных приближений и метод механических квадратур [23, 24].

Поступаем следующим образом. Сначала задаём размер  $L_{от}$  и затем решение интегрального уравнения (2) строим численно – методом механических квадратур. Этот

метод предполагает дискретизацию контура выработки  $N$  граничными элементами в виде коротких прямолинейных отрезков и замену интеграла суммой. При последующем интегрировании полученного выражения по каждому граничному элементу при условии, что напряжения и усилия постоянны в пределах каждого элемента, получим  $N$  векторных уравнений относительно вектора усилия фиктивной нагрузки или  $2N$  (для плоской задачи) уравнений относительно его проекций. Полученная система алгебраических уравнений решается любым известным методом.

Затем вычисляем напряжения от действия найденной фиктивной нагрузки, используя при этом решения Кельвина о действии единичной силы на бесконечное пространство [19, 20, 24] и прибавляя к ним напряжения в нетронутых горными работами массиве, находим суммарные напряжения в точках на контактах пласта с массивом (линии  $VT$  на рисунке 4). После этого на границе упругой и предельно напряжённой зон сравниваем соответствующие компоненты напряжений. Если их значения отличаются, то расчёт повторяем при следующем значении  $L_{OT}$ , и так до тех пор, пока значения напряжений не совпадут.

Изложенный подход к постановке задачи и способам её решения представляет собой модель геомеханического состояния массива, вмещающего угольный пласт и горную выработку, пройденную по этому пласту. Она достаточно точно описывает параметры опорного давления (максимальное напряжение и ширину предельно напряжённой зоны) в бортах выработки и детально изложена в [25, 26], а её приложение к решению ряда задач геомеханики приведено в [27-30].

При определении параметров предельно напряжённой зоны полагалось, что породы кровли и почвы обладают достаточной прочностью и могут деформироваться лишь упруго. Рассмотрим условия перехода слоя почвы пласта в предельное состояние, которые будут справедливы как для пород почвы пласта, так и для слоя его кровли.

Поскольку при равных условиях краевая часть угольного пласта длиной  $L_{OT}$  переходит в предельное состояние раньше пород слоя его почвы мощностью  $m$  [3, 5], то очевидно, что породный слой оказывается в предельном состоянии в глубине массива на некотором удалении от борта выработки (линия  $AV$ ) (рисунок 5). Условием перехода в предельное состояние пород слоя почвы может быть принято условие превышения главного напряжения  $\sigma_{1p}$ , действующего в пласте, над значением главного напряжения  $\sigma_{1s}$  в породном слое. Оно представляется следующим образом:

$$\sigma_1 \geq \sigma_{1s}. \quad (6)$$

Напряжение  $\sigma_{1p}$  может быть выражено через коэффициент концентрации напряжений  $k_\sigma$  и величину  $\gamma H$  следующим образом:

$$\sigma_1 = \sigma \cdot \gamma. \quad (7)$$

При соблюдении условия (6) линии скольжения возникают и в породном слое, образуя предельную область  $FF1P1R1$  (рисунок 5). При этом часть слоя  $AFR1V1$  остаётся упругой. Возникающие в слое на линии скольжения напряжения  $\sigma_{3s}$  за счёт того, что сдвигающие силы по контакту слоя, обусловленные касательными напряжениями  $\tau_{syz}$ , компенсируют друг друга, давят на слой по линии  $AV1$ , приводя его к выпиранию внутрь выработки.

В предельно напряжённой зоне справедливо условие Кулона – Мора [11, 31]

$$\sigma_1 - \beta_n \sigma_3 = \sigma_0. \quad (8)$$

В выражении (8)  $\sigma_1 = \sigma_{1s}$ ,  $\sigma_3 = \sigma_{3s}$  – главные напряжения в слое, а вместо  $\sigma_0$  и  $\beta_n$  должны учитываться предел прочности пород на одноосное сжатие слоя  $\sigma_{0s}$  и параметр объёмной прочности для слоя  $\beta_{ns}$ , определяемый по формуле (5)

$$\beta_{ns} = \frac{1 + \sin \rho}{1 - \sin \rho},$$

с заменой  $\rho$  на  $\rho_s$ , где  $\rho_s$  – угол внутреннего трения пород слоя почвы.

Отметим, что в породном слое почвы на участке, расположенном непосредственно под выработкой, породы находятся в условиях плоской деформации. Вертикальное главное напряжение  $\sigma_{3s}$  равно реакции крепи  $q$ . Линии скольжения образуют систему изогональных линий, наклонённых к горизонту под углом  $\epsilon_s$  (рисунок 1), а из выражения (8) следует, что

$$\sigma_{1s} = \sigma_{0s} + \beta_{ns} q. \quad (9)$$

Из условия равновесия блока  $AFR1V1$  следует, что  $\sigma_{3s}$  на участке  $FF1P1R1$  равно напряжению  $\sigma_{1s}$  в слое почвы выработки, определяемому выражением (9), т.е.

$$\sigma_s = \sigma_{0s} + \beta_{ns} q. \quad (10)$$

Напряжение  $\sigma_{1s}$  на участке  $FF1P1R1$  может быть выражено через напряжение  $\sigma_{3s}$  согласно условию (8)

$$\sigma_{1s} = \sigma_{0s} + \beta_{ns} \sigma_s \quad (11)$$

Подставляя в формулу (11) выражение  $\sigma_s$  из (10), после преобразования получаем следующее выражение главного напряжения  $\sigma_{1s}$  на



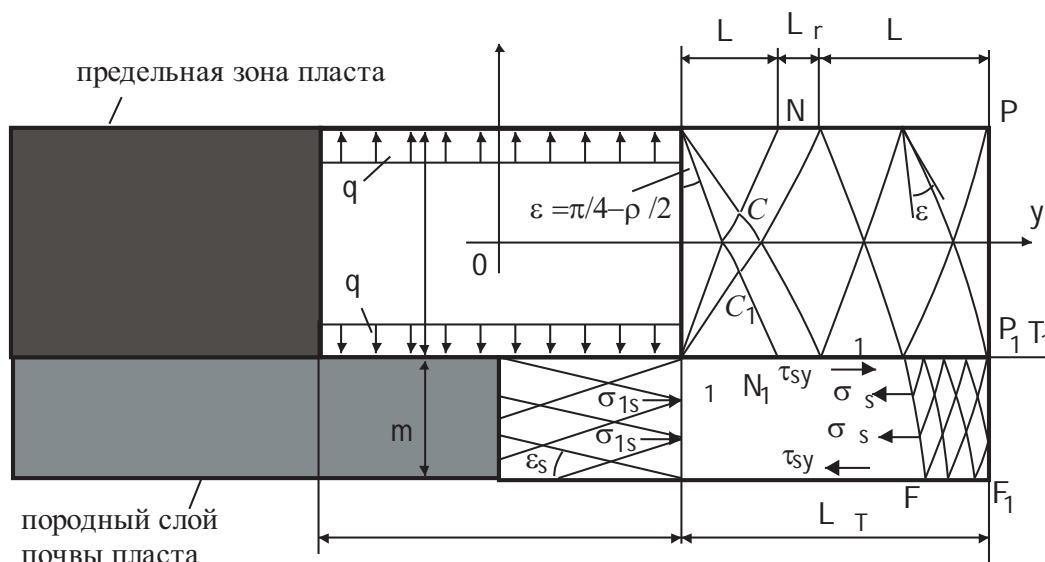


Рисунок 5 – Схема выработки и предельно напряжённых зон в пласте и породном слое

участке слоя, находящегося в предельном состоянии:

$$\sigma_{1s} = \sigma_{0s}(1 + \beta_{ns}) + \beta_{ns}^2 \cdot q. \quad (12)$$

Подставляем выражения (7) и (12) в формулу (6), получаем условие предельного состояния слоя в следующем виде:

$$\sigma \cdot \gamma \geq \sigma_{0s}(1 + \beta_{ns}) + \beta_{ns}^2 \cdot q. \quad (13)$$

Из неравенства (13) выражаем значение для  $\sigma_{0s}$ , при котором происходит переход породного слоя почвы пласта в предельное состояние:

$$\sigma_{0s} \leq \frac{\sigma \cdot \gamma - \beta_{ns}^2 \cdot q}{(1 + \beta_{ns})}. \quad (14)$$

Если значения  $\gamma H$  и  $q$  задаются в мегапаскалях, то, разделив выражение (14) на десять и принимая во внимание, что  $0,1\sigma_{0s}$  равно коэффициенту крепости породы слоя  $f_s$  по шкале проф. Протодяконова, получим следующее выражение для этого коэффициента, при котором возможен переход слоя в предельное состояние:

$$f_s \leq \frac{\sigma \cdot \gamma - \beta_{ns}^2 \cdot q}{10 \cdot (1 + \beta_{ns})}. \quad (15)$$

Отметим, что в выражении (15) значение коэффициента концентрации напряжений  $k_\sigma$  находится в ходе решения методом граничных элементов упруго-пластической задачи, описанной выше, при этом стыковка решения упругой и пластической задач производится вдоль границы пласта и породного слоя (линия  $V_1T$  на рисунке 5).

## ПРОВЕДЕНИЕ РАСЧЁТОВ И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

В рамках описанной модели и разработанной программы проведён вычислительный эксперимент, за исходные данные в котором приняты следующие параметры массива и выработки:  $\gamma=25$  кН/м<sup>3</sup>,  $H=800$  м,  $\lambda=1$ ,  $h=m=3$  м, коэффициент крепости пласта  $f_p=1$ , угол внутреннего трения пласта и пород почвы  $\rho_p=\rho_s=20^\circ$ ; коэффициент сцепления и угол внутреннего трения по контакту пласта и массива  $K'=0$ ,  $\rho'=10^\circ$ ,  $q=0$ . Другие параметры среды в ходе эксперимента менялись. Разупрочнение пласта не учитывалось.

На рисунке 6 а графики, построенные при  $b=30$  м, представляют собой эпюры напряжений  $\sigma_z$  и  $\tau_{yz}$  в кровле пласта вдоль линии  $PT$  на рисунке 4 предельно напряжённой зоны (графики 1, 3) и в упругой области пласта (графики 2, 4).

Точки  $V, N, G, R$  на графиках являются границами участков предельно напряжённой зоны пласта (рисунок 2). Из рисунка следует, что значения напряжений в упругой области и в предельно напряжённой зоне совпадают в точке  $R$ . Снятый с графика горизонтальный размер отрезка между точками  $V$  и  $R$  соответствует размеру предельно напряжённой зоны  $L_{OT}$ . Графики на рисунке 6 б соответствуют главному напряжению  $\sigma_1$  в предельно напряжённой зоне (график 1) и упругой области

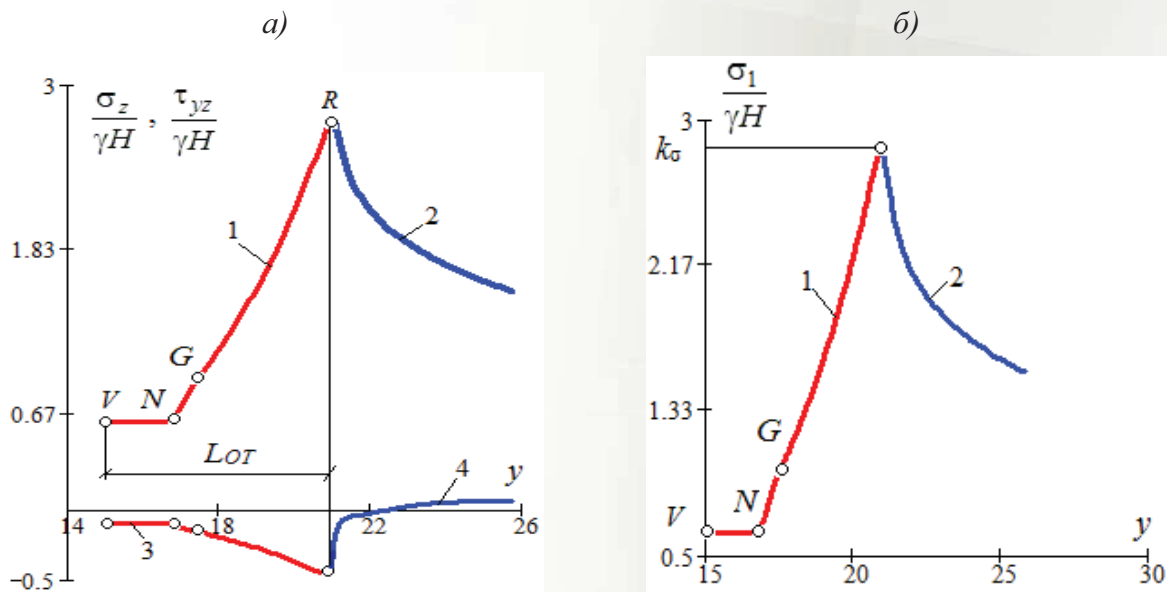


Рисунок 6 – Эпюры напряжений  $\sigma_z$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\sigma_1$  вдоль кровли пласта

(график 2) пласта. Отнесённая к  $\gamma H$  ордината в точке R равна  $k_\sigma$  в кровле пласта. Из графиков рисунка 2 определены величины  $L_{OT}=5,85$  м и  $k_\sigma=2,85$ .

На рисунке 7 представлены результаты проведённых исследований в виде графиков зависимости параметров опорного давления в окрестности пластовой выработки от размеров её пролёта  $b$ . Так, на рисунке 7 а построен график зависимости коэффициента концентрации напряжений  $k_\sigma$  в предельно напряжённой зоне от пролёта выработки, а на рисунке 7 б показан график зависимости размера пре-

дельно напряжённой зоны  $L_{OT}$  от пролёта выработки.

Из рисунков следует, что, во-первых, графики не линейны и имеют вид выпуклых кривых. Во-вторых, на обеих кривых можно условно выделить по два участка. На первом участке ( $b \leq 25$  м) темпы роста кривых выше, чем на втором участке ( $b \geq 25$  м). Т.е. с линейным увеличением пролёта выработки возрастание параметров опорного давления происходит медленнее роста пролёта. Расчёты показывают, что при  $b=90$  м параметры опорного давления получились следующими:  $k_\sigma=3,8$ ,  $L_{OT}=6,76$  м.

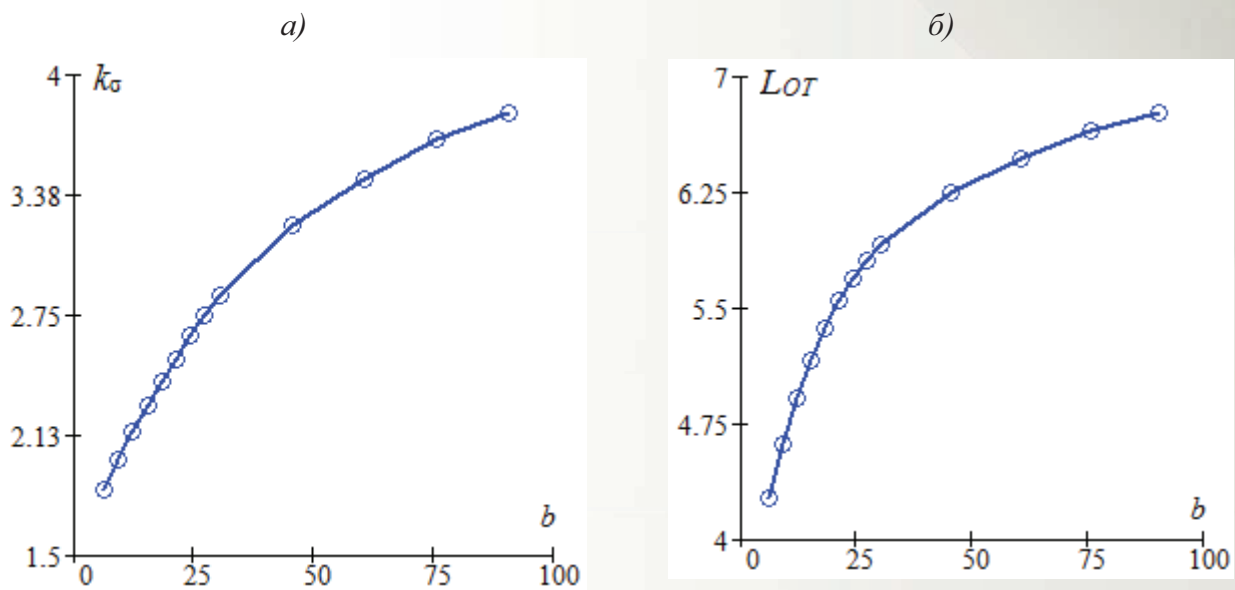


Рисунок 7 – Графики зависимости параметров опорного давления от пролёта выработки

Если сравнить их с результатами на рисунке 6, то можно заметить, что увеличение пролёта в три раза приводит к увеличению коэффициента концентрации напряжений только в 1,333 раза, а размер предельно напряжённой зоны увеличивается всего в 1,154 раза (на 15,5 %).

Ниже представлены графические результаты исследования перехода в предельное состояние пород кровли. В качестве критерия наступления предельного состояния используется зависимость (15). Так, на рисунке 8 построен график зависимости коэффициента крепости пород при изменении ширины выработки. Он соответствует переходу в предельное состояние кровли в глубине массива

над максимумом опорного давления угольного пласта.

Из рисунка видно, что график имеет вид плавной выпуклой кривой. Как следует из графика, переход кровли пласта в предельное состояние впереди забоя (борта) выработки происходит лишь в породах, коэффициент крепости которых незначительно превосходит коэффициент крепости пласта. Даже при значительном обнажении выработанного пространства ( $b=90$  м) предельное состояние наступает при сравнительно небольшом коэффициенте крепости пород по шкале проф. Протождьяконова ( $fk=2,42$  единицы).

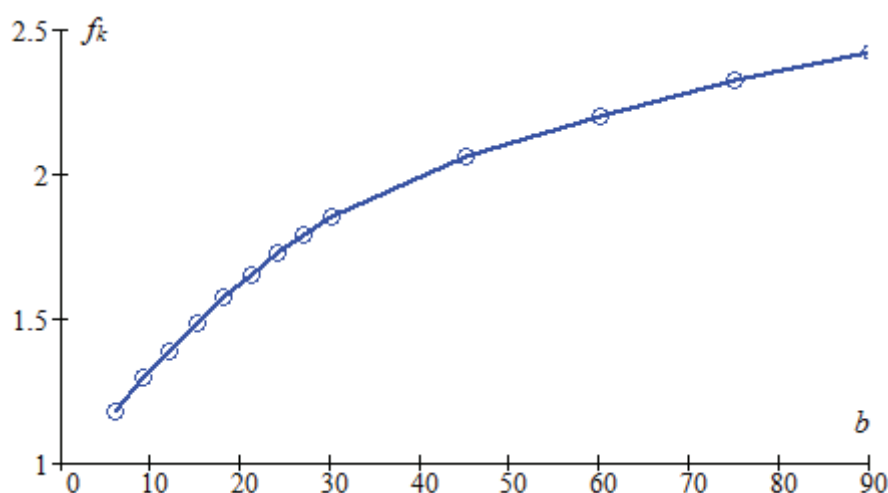


Рисунок 8 – График зависимости коэффициента кровли от пролёта выработки

### Вывод

1. Задача о распределении поля напряжений в массиве горных пород с пластовой выработкой сводится к краевой задаче механики деформируемого твёрдого тела, решение которой эффективно реализуется методом граничных элементов. Параметры опорного давления около выработки могут быть определены в ходе решения методом последовательных приближений упругопластической задачи, в которой условиями возникновения неупругих деформаций, образующих в краевых частях пласта предельно напряжённые зоны, принимаются критерии прочности теорий Кулона – Мора и Мора – Кузнецова.

2. Параметры опорного давления с ростом пролёта пластовой выработки меняются в виде плавных выпуклых кривых. С увеличением пролёта выработки темпы их роста снижаются.

3. Опорное давление, действующее в предельно напряжённых приконтурных зонах пласта, является причиной перехода в предельное состояние вмещающих пород. Это состояние может быть реализовано лишь для пород с относительно небольшими характеристиками прочности, незначительно превышающими прочность угольного пласта.

4. Полученное решение задачи опре-

деления параметров опорного давления в горном массиве в окрестности забоя пластовой выработки может найти применение

при оценке его опасности по динамическим явлениям, в частности, по внезапным прорывам газа из вмещающих пород.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петухов И.М. Механика горных ударов и выбросов / И.М. Петухов, А.М. Линьков. – М.: Недра, 1983. – 280 с.
2. Чернов О.И. Прогноз внезапных выбросов угля и газа / О.И. Чернов, В.Н. Пузырев. – М.: Недра, 1979. – 296 с.
3. Зыков В.С. Внезапные выбросы угля и газа и другие газодинамические явления в шахтах. – Кемерово: ООО «Фирма ПОЛИГРАФ», 2010. – 334 с.
4. Мурашев В.И. Прогноз и предотвращение динамических явлений в угольных шахтах / В.И. Мурашев, В.С. Зыков, В.С. Лудзиш // Безопасность труда в промышленности. – 1993. – № 12. – С. 17.
5. Мурашев В.И. Разработка научных основ безопасного ведения горных работ в угольных шахтах на основе исследования геомеханических процессов: автореф. дис. на соиск. учен. степ. докт. техн. наук / Мурашев Вячеслав Иванович. – М., 1980. – 35 с.
6. Геомеханика / П.В. Егоров, Т.Т. Штумпф, А.А. Ренев и др. – Кемерово: КузГТУ, 2002. – 338 с.
7. Баклашов И.В. Механические процессы в породных массивах / И.В. Баклашов, Б.А. Картозия. – М.: Недра, 1980.
8. Баклашов И.В. Механика подземных сооружений и конструкции крепей / И.В. Баклашов, Б.А. Картозия. – М.: Недра, 1992. – 544 с.
9. Борисов А.А. Механика горных пород и массивов. – М.: Недра, 1980. – 360 с.
10. Турчанинов И.А. Основы механики горных пород / И.А. Турчанинов, М.А. Иофис, Э.В. Каспарьян. – М.: Недра, 1989. – 488 с.
11. Фисенко Г.Л. Предельные состояния горных пород вокруг выработок. – М.: Недра, 1976. – 272 с.
12. Черданцев Н.В. О количественных оценках влияния некоторых параметров массива горных пород на состояние кровли пластовой выработки // Вестник Научного центра по безопасности работ в угольной промышленности. – 2017. – № 1. – С. 6–12.
13. Черданцев Н.В. О некоторых условиях наступления предельного состояния кровли угольного пласта при его отработке очистной выработкой // Безопасность труда в промышленности. – 2017. – № 5. – С. 17–22.
14. Черданцев Н.В. Разработка модели геомеханического состояния углепородного массива, вмещающего пластовую выработку / Н.В. Черданцев, С.В. Черданцев // Безопасность труда в промышленности. – 2014. – № 11. – С. 41–45.
15. Черданцев Н.В. Определение размера предельно-напряжённой зоны углепородного массива в борту пластовой выработки / Н.В. Черданцев, С.В. Черданцев // Вестник КузГТУ. – 2014. – № 4. – С. 3–10.
16. Черданцев Н.В. Разработка и реализация математической модели геомеханического состояния горного массива, вмещающего угольный пласт и пройденную по нему выработку / Н.В. Черданцев, С.В. Черданцев // Вычислительные технологии. – 2017. – № 1. – С. 84–96.
17. Бреббия К. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. – М.: Мир, 1987. – 525 с.
18. Крауч С. Методы граничных элементов в механике твёрдого тела / С. Крауч, А. Старфилд. – М.: Мир, 1987. – 328 с.
19. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 940 с.
20. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твёрдого тела. – М.: Наука, 1988. – 712 с.
21. Черданцев Н.В. Вопросы методического и инструментального обеспечения мониторинга горных выработок / Н.В. Черданцев, В.Т. Преслер, В.Е. Ануфриев. – Кемерово, ИУ СО РАН, 2012. – 222 с.
22. Кузнецов Г.Н. Предельные состояния твердых горных пород с учетом пространственной ориентировки поверхностей ослабления // Тр. ВНИМИ. – Л., 1961. – № 43. – С. 98–112.
23. Канторович Л.В. Приближённые методы высшего анализа. – 5-е изд. / Л.В. Канторович, В.И. Крылов. – М.; Л.: Физматгиз, 1962. – 708 с.
24. Партон В.З. Методы математической теории упругости / В.З. Партон, П.И. Перлин. – М.: Наука,

1981. – 688 с.

25. Черданцев Н.В. Метод граничных интегральных уравнений в задачах механики подземных сооружений / Н.В. Черданцев, В.А. Шаламанов // Вест. КузГТУ. – 2003. – № 4. – С. 19–21.

26. Черданцев Н.В. Зоны нарушения сплошности в области сопряжения двух горных выработок / Н.В. Черданцев, С.В. Черданцев // ПМТФ. – 2004. – № 4. – С. 137–139.

27. Черданцев Н.В. Классификация вырезов по степени их влияния на окружающий массив / Н.В. Черданцев, В.Т. Преслер, В.Ю. Изаксон // Вест. КузГТУ. – 2006. – № 5. – С. 3–7.

28. Черданцев Н.В. Обоснование геомеханической модели разрушения многосвязного массива горных пород с прочностной анизотропией / Н.В. Черданцев, В.Т. Преслер, В.Ю. Изаксон // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2009. – Т. 7. – № 12. – С. 122–125.

29. Черданцев Н.В. Устойчивость целиков в окрестности системы выработок, сооружаемых в анизотропном по прочности массиве горных пород // Вестник КузГТУ. – 2012. – № 1. – С. 15–19.

30. Черданцев Н.В. Влияние анкерной крепи на устойчивость породного массива, вмещающего единичную выработку // Вестник КузГТУ. – 2012. – № 4. – С. 3–7.

31. Булычев Н.С. Механика подземных сооружений. – М.: Недра, 1994. – 382 с.

**UDC 622.023.23**

© N.V. Cherdancev, V.S. Zykov, 2017

**N.V. Cherdancev**

Doctor of Technical Sciences, Laboratory head  
The Federal Research Center of Coal and Coal  
Chemistry of SB RAS, Kemerovo  
e-mail: nvch2014@yandex.ru

**V.S. Zykov**

Doctor of Technical Sciences, Professor, Chief  
Scientific Researcher of Laboratory  
JSC «NC VostNII», Kemerovo  
e-mail: vnimizvs@mail.ru

#### **THE SOLUTION TO A PROBLEM OF IN-SEAM WORKING AREAS ABUTMENT PRESSURE PARAMETERS DETERMINATION BASED ON THE SIMULATION EXPERIMENT**

*The geomechanical condition of coal-rock massif, bedding rock with in-seam working problem solution results are presented. The bedding rock strength exceeds the seam strength. The diagram of the seam conditional stresses corresponds to the Prandtl diagram with parallel to the abscissa axis material's ultimate deformation section.*

*In the reviewed boundary value problem, the rock massif operates under conditions of a flat deformed state, and the seam zones located in the walls of the mine opening are in an extremely strained state. The problem is solved by the boundary element methods.*

*Based on the conducted studies results, graphs of changes of stress concentration coefficient and the extremely strained state of the seam zone, depending on the opening span.*

*Coal-rock massif before mine opening is pressed by equicomponent (hydrostatical) stress field. It is shown, that with the opening span increasing the intensity of abutment pressure parameters growth decreases.*

**Key words:** ROCK MASSIF, COAL SEAM, MINING, EXTREMELY STRESSED STATE, THEORY OF COULOMB-MORA STRENGTH

#### **REFERENCES**

1. Petuhov I.M. Mehanika gornyh udarov i vybrosov (Mine rock shocks and outbursts mechanics) / I.M. Petuhov, A.M. Lin'kov. M.: Nedra, 1983. 280 p.

2. Chernov O.I. Prognoz vnezapnyh vybrosov uglja i gaza (The coal and gas outburst forecast) / O.I. Chernov, V.N. Puzryev. M.: Nedra, 1979. 296 p.

3. Zykov V.S. Vnezapnye vybrosy uglja i gaza i drugie gazodinamicheskie javlenija v shahtah (Coal and gas

outburst and other gasdynamic phenomena in mines). Kemerovo: ООО «Firma POLIGRAF», 2010. 334 p.

4. Murashev V.I. Prognoz i predotvrashhenie dinamicheskikh javlenij v ugolnyh shahtah (The forecast and prevention of the dynamic phenomena in coal mines) / V.I. Murashev, V.S. Zykov, V.S. Ludzish // *Bezopasnost' truda v promyshlennosti*. 1993. № 12. p. 17.

5. Murashev V.I. Razrabotka nauchnyh osnov bezopasnogo vedenija gornyh rabot v ugolnyh shahtah na osnove issledovanija geomechanicheskikh processov: avtoref. dis. na soisk. uchen. step. dokt. tehn. nauk (The development of scientific bases of mining operations safety in coal mines on the geomechanical processes researches basis) / Murashev Vjacheslav Ivanovich. M., 1980. 35 p.

6. Geomehanika (Geomechanics) / P.V. Egorov, T.T. Shtumpf, A.A. Renev i dr. Kemerovo: KuzGTU, 2002. 338 p.

7. Baklashov I.V. Mehanicheskie processy v porodnyh massivah (Mechanics of underground structures and support constructions) / I.V. Baklashov, B.A. Kartozija. M.: Nedra, 1980.

8. Baklashov I.V. Mehanika podzemnyh sooruzhenij i konstrukcii krepej (Mechanics of rocks and massives) / I.V. Baklashov, B.A. Kartozija. M.: Nedra, 1992. 544 p.

9. Borisov A.A. Mehanika gornyh porod i massivov (Mechanics of rocks and massives). M.: Nedra, 1980. 360 p.

10. Turchaninov I.A. Osnovy mehaniki gornyh porod (Fundamentals of rocks mechanics) / I.A. Turchaninov, M.A. Iofis, Je.V. Kaspar'jan. M.: Nedra, 1989. 488 p.

11. Fisenko G.L. Predelnye sostojanija gornyh porod vokrug vyrabotok (Limit conditions of rocks around developments). M.: Nedra, 1976. 272 p.

12. Cherdancev N.V. O kolichestvennyh ocenkah vlijanija nekotoryh parametrov massiva gornyh porod na sostojanie krovli plastovoj vyrabotki (On some rock massif parameters influence on quantitative estimates of the seam opening roof condition) // *Vestnik Nauchnogo centra po bezopasnosti rabot v ugolnoj promyshlennosti*. 2017. № 1. pp. 6–12.

13. Cherdancev N.V. O nekotoryh uslovijah nastuplenija predelnogo sostojanija krovli ugolnogo plasta pri ego otrabotke oчитnoj vyrabotkoj (On Some Conditions for Occurrence of Ultimate limit State of the Coal Seam Roof at its Development by the Room) // *Bezopasnost' truda v promyshlennosti*. 2017. № 5. pp. 17–22.

14. Cherdancev N.V. Razrabotka modeli geomechanicheskogo sostojanija ugleporodnogo massiva, vmeshhajushhego plastovuju vyrabotku (Coal and rock massif bedding the seam opening geomechanical state model development) / N.V. Cherdancev, S.V. Cherdancev // *Bezopasnost' truda v promyshlennosti*. 2014. № 11. pp. 41–45.

15. Cherdancev N.V. Opredelenie razmera predelno-naprjazhjonnoj zony ugleporodnogo massiva v bortu plastovoj vyrabotki (Determining the size of maximum hard zone of coal containing array aboard the reservoir of production development) / N.V. Cherdancev, S.V. Cherdancev // *Vestnik KuzGTU*. 2014. № 4. pp. 3–10.

16. Cherdancev N.V. Razrabotka i realizacija matematicheskoj modeli geomechanicheskogo sostojanija gornogo massiva, vmeshhajushhego ugolnyj plast i projdennuju po nemu vyrabotku (Development and implementation of a mathematical model of the geomechanical state coal rock mass, enclosing the coal seam and the mine working in it) / N.V. Cherdancev, S.V. Cherdancev // *Vychislitelnye tehnologii*. 2017. № 1. pp. 84–96.

17. Brebbija K. Metody granichnyh jelementov (The boundary element method) / K. Brebbija, Zh. Telles, L. Vroubel. M.: Mir, 1987. 525 p.

18. Krauch S. Metody granichnyh jelementov v mehanike tvjordogo tela (The boundary element method in solid mechanics) / S. Krauch, A. Starfield. M.: Mir, 1987. 328 p.

19. Lur'e A.I. Teorija uprugosti (The elastic theory). M.: Nauka, 1970. 940 p.

20. Rabotnov Ju.N. Mehanika deformiruemogo tvjordogo tela (Deformable solid mechanics). M.: Nauka, 1988. 712 p.

21. Cherdancev N.V. Voprosy metodicheskogo i instrumentalnogo obespechenija monitoringa gornyh vyrabotok (Questions of methodical and instrumental support of mine openings monitoring) / N.V. Cherdancev, V.T. Presler, V.E. Anufriev. Kemerovo, IU SO RAN, 2012. 222 p.

22. Kuznecov G.N. Predelnye sostojanija tverdyh gornyh porod s uchetom prostranstvennoj orientirovki poverhnostej oslablenija (Limiting states of solid mine rock with allowance of the weakening surfaces spatial orientation) // *Tr. VNIMI. L.*, 1961. № 43. pp. 98–112.

23. Kantorovich L.V. Priblizhjonnye metody vysshego analiza (Approximate methods of the highest analysis).

5-е изд. / L.V. Kantorovich, V.I. Krylov. М.; Л.: Fizmatgiz, 1962. 708 p.

24. Parton V.Z. Metody matematicheskoj teorii uprugosti (Approaches for the mathematical elastic theory) / V.Z. Parton, P.I. Perlin. М.: Nauka, 1981. 688 p.

25. Cherdancev N.V. Metod granichnyh integralnyh uravnenij v zadachah mehaniki podzemnyh sooruzhenij (The method of boundary integral equations in underground structure mechanics problems) / N.V. Cherdancev, V.A. Shalamanov // Vest. KuzGTU. 2003. № 4. pp. 19–21.

26. Cherdancev N.V. Zony narushenija sploshnosti v oblasti soprjazhenija dvuh gornyh vyrabotok (Discontinuity Zones in the Junction Region of Two Mine Tunnels) / N.V. Cherdancev, S.V. Cherdancev // PMTF. 2004. № 4. pp. 137–139.

27. Cherdancev N.V. Klassifikacija vyrezov po stepeni ih vlijanija na okruzhajushhij massiv (Classification of cut-outs according to the degree of their influence on the surrounding massif) / N.V. Cherdancev, V.T. Presler, V.Ju. Izakson // Vest. KuzGTU. 2006. № 5. pp. 3–7.

28. Cherdancev N.V. Obosnovanie geomechanicheskoj modeli razrushenija mnogosvjaznogo massiva gornyh porod s prochnostnoj anizotropiej (Substantiation of multiply connected rock massif with strength anisotropy geomechanical destruction model) / N.V. Cherdancev, V.T. Presler, V.Ju. Izakson // Gornyj informacionno-analiticheskij bjulleten'. 2009. T. 7. № 12. pp. 122–125.

29. Cherdancev N.V. Ustojchivost' celikov v okrestnosti sistemy vyrabotok, sooruzhaemyh v anizotropnom po prochnosti massive gornyh porod (Pillar stability around the opening system headed in the strength anisotropic rock massif) // Vestnik KuzGTU. 2012. № 1. pp. 15–19.

30. Cherdancev N.V. Vlijanie ankernoj krepj na ustojchivost' porodnogo massiva, vmeshhajushhego odinochnuju vyrabotku (Influence of roof boltings on the stability of the rock massive, including single processing) // Vestnik KuzGTU. 2012. № 4. pp. 3–7.

31. Bulychev N.S. Mehanika podzemnyh sooruzhenij (Mechanics of underground constructions). М.: Nedra, 1994. 382 p.